CHAPTER 7

Desigualdades en triángulos.

41. Ángulos exteriores.

El ángulo suplementario a un ángulo de un triángulo (o polígono) se llama un **ángulo exterior** de este triángulo (o polígono).

Por ejemplo (Figura 48), $\angle BCD, \angle CBE, \angle BAF$ son ángulos exteriores del triángulo ABC. Para contrastar con los ángulos exteriores, los ángulos del triángulo (o polígono) a veces se llaman **interiores**.

Para cada ángulo interior de un triángulo (o polígono) se pueden construir dos ángulos exteriores (extendiendo uno o el otro lado del ángulo). Tales ángulos exteriores son congruentes ya que son verticales.

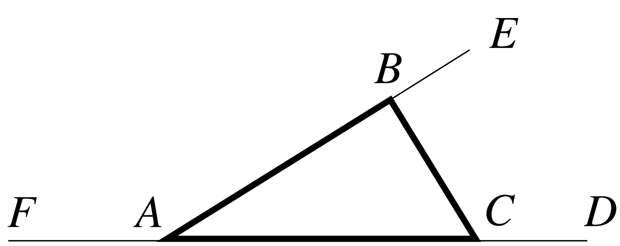

FIGURA 48

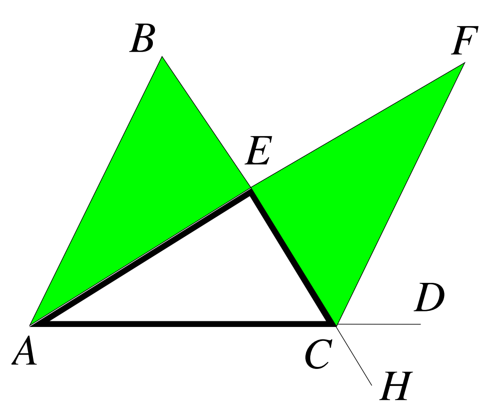

FIGURA 49

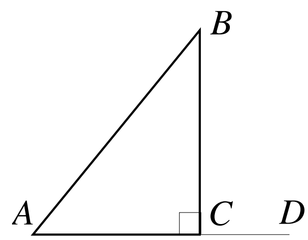

FIGURA 50

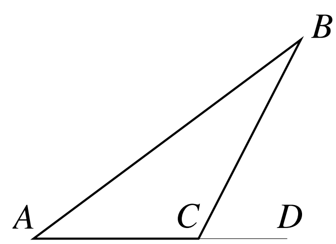

FIGURA 51

42. `Teorema.`

Un ángulo exterior de un triángulo es más grande que cada ángulo interior no suplementario a éste.

Por ejemplo, probemos que el ángulo exterior BCD del $\triangle ABC$ (Figura 49) es más grande que cada uno de los ángulos interiores A y B que son los que no son sus suplementarios.

Por el punto medio E del lado BC trazamos la mediana AE y sobre la continuación de la mediana marcamos el segmento EF congruente con AE. El punto F obviamente está en la parte de adentro del ángulo BCD. Conectamos F y C con un segmento. Los triángulos ABE y EFC (sombreados en la Figura 49) son congruentes ya que en el vértice E tienen ángulos congruentes entre los lados respectivamente congruentes. De la congruencia de los triángulos concluimos que los ángulos B y ECF, opuestos a los lados congruentes AE y EF, también son congruentes. Pero el ángulo ECF es una parte del ángulo exterior BCD y, por lo tanto, es más chico que $\angle BCD$. Luego el ángulo B es más chico que el ángulo BCD.

Al continuar el lado BC más allá del punto C obtenemos el ángulo exterior ACH congruente con el ángulo BCD. Si del vértice B trazamos la mediana al lado AC y duplicamos la mediana continuándola después del lado AC, entonces probamos similarmente que el ángulo A es más chico que el ángulo ACH, i.e., es más chico que el ángulo BCD.

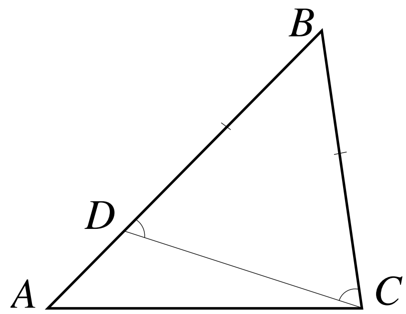

FIGURA 52

43. Corolario.

Si en un triángulo un ángulo es recto u obtuso, entonces los otros dos ángulos son agudos.

En efecto supongamos que el ángulo C en $\triangle ABC$ (Figura 50 o 51) es recto u obtuso. Entonces su suplemetario, el ángulo exterior BCD, tiene que ser recto o agudo. Por lo tanto los ángulos A y B, que por el teorema anterior son más chicos que este ángulo exterior, deben ser ambos agudos.

44. Las relaciones ente los lados y los ángulos de un triángulo.

Teoremas. **En un triángulo**

(1) **los ángulos opuestos a lados congruentes son congruentes;**

(2) **el ángulo opuesto a un lado más grande es más grande.**

(1) Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces el triángulo es isóceles y, por lo tanto, los ángulos opuestos a estos lados tienen que ser congruentes como los ángulos en la base de un triángulo isóceles (Apartado 35).

(2) En el $\triangle ABC$ (Figura 52) sea AB un lado más grande que BC. Se debe probar que el ángulo C es más grande que el ángulo A.

Sobre el lado más grande BA, marquemos el segmento BD congruente al lado más chico y tracemos la recta que une D con C. Obtenemos un triángulo isóceles DBC que tiene ángulos congruentes en la base, i.e., $\angle BDC = \angle BCD$. Pero el ángulo BDC, al ser un ángulo exterior con respecto al $\triangle ADC$, es más grande que el ángulo A y, así, el ángulo BCD también es más grande que el ángulo A. Por lo tanto el ángulo BCA, que contiene al $\angle BCD$ como una parte, también es más grande que el ángulo A.

45. Los teoremas conversos.

En un triángulo

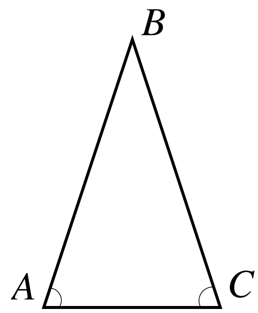

FIGURA 53

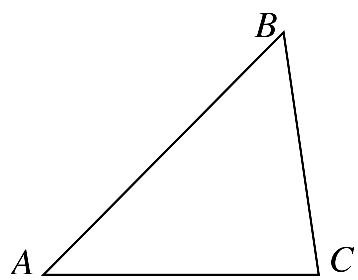

FIGURA 54

(1) **los lados opuestos a ángulos congruentes son congruentes;**

(2) **el lado opuesto a un ángulo más grande es más grande.**

(1) En el $\triangle ABC$ sean los ángulos A y C congruentes (Figura 53); se tiene que probar que $AB = AC$.

Supongamos que lo contrario es cierto, i.e., que los lados AB y BC no son congruentes. Entonces uno de estos lados es más grande que el otro y, por lo tanto, de acuerdo con el teorema directo, uno de los ángulos A o C tiene que ser más grande que el otro. Pero esto contradice la hipótesis de que $\angle A = \angle C$. Luego la suposición de que AB y BC son incongruentes es imposible. Esto deja sólo la posibilidad de que $AB = BC$.

(2) En el $\triangle ABC$ (Figura 54) sea el ángulo C más grande que el ángulo A. Se debe probar que $AB > BC$.

Supongamos que lo contrario es cierto, i.e., que AB no es más grande que BC. Entonces pueden ocurrir dos casos: o bien $AB = BC$ o bien $AB < BC$.

De acuerdo con el teorema directo, en el primer caso el ángulo C debería ser congruente con el ángulo A y, en el segundo caso, el ángulo C debería ser más chico que el ángulo A. Ambas conclusiones contradicen la hipótesis y, por lo tanto, ambos casos quedan excluídos. Luego la única posibilidad restante es $AB > BC$.

`Corolario.`

(1) *En un triángulo equilátero todos los ángulos son congruentes.*

(2) *En un triángulo equiángulo todos los lados son congruentes.*

46. Demostración por contradicción.

El método que acabamos de usar para demostrar los teoremas conversos se llama **demostración por contradicción** o **reductio ad absurdum**. Al comienzo de la argumentación se hace la suposición de lo contrario a lo que se debe probar. Entonces, al razonar basados en esta suposición, se arriba a una contradicción (a un absurdo). Este resultado nos fuerza a rechazar la suposición inicial y, por consiguiente, a aceptar lo que se tenía que demostrar. Esta manera de razonar se usa frecuentemente en las demostraciones matemáticas.

47. Un comentario sobre los teoremas conversos.

Es un error, no poco común entre los estudiantes principiantes de geometría, suponer que el teorema converso se establece automáticamente una vez que se ha verificado la validez del teorema directo. De aquí surge la falsa impresión de que una demostración del teorema converso es completamente innecesaria. Como puede verse de ejemplos, como el dado en el Apartado 30, esta conclusión es erronea. Por lo tanto los teoremas conversos, siempre que sean válidos, necesitan demostraciones separadas.

Sin embargo en el caso de la congruencia o incongruencia de dos lados de un triángulo ABC, por ejemplo los lados AB y BC, sólo los siguientes tres casos pueden ocurrir:

$$AB = BC, \qquad AB > BC, \qquad AB < BC.$$

Cada uno de estos tres casos excluye los otros dos: digamos que el primer caso $AB = BC$ ocurre, entonces ni el 2do ni el 3er caso son posibles. En el teorema del Apartado 44, hemos considerado todos los tres casos y llegamos respectivamente a las siguientes conclusiones con respecto a los ángulos opuestos C y A:

$$\angle C = \angle A, \qquad \angle C > \angle A, \qquad \angle C < \angle A.$$

Cada una de estas conclusiones excluye a las otras dos. También vimos en el Apartado 45 que los teoremas conversos son verdaderos y se pueden demostrar fácilmente mediante *reductio ad absurdum*.

En general si en un teorema o varios teoremas consideramos todos los casos que son mutuamente excluyentes (lo que puede ocurrir con respecto a la magnitud de alguna cierta cantidad o disposición de ciertas partes de una figura), y resulta que en estos casos llegamos a conclusiones mutuamente excluyentes (respecto a algunas otras cantidades o partes de la figura), entonces podemos afirmar *a priori* que las proposiciones conversas también son verdaderas.

Encontraremos esta regla de convertibilidad muy frecuentemente.

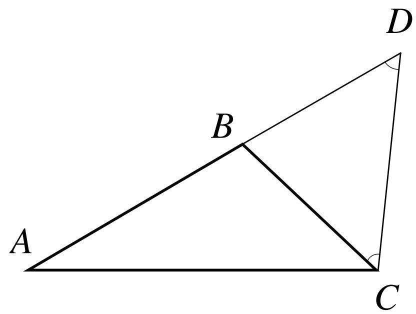

FIGURA 55

48. `Teorema.`

En un triángulo cada lado es más chico que las suma de los otros dos lados.

Si tomamos un lado en un triángulo que no es el más grande de todos, entonces, por supuesto, será más chico que la suma de los otros dos lados. Por lo tanto tenemos que demostrar que incluso el lado más grande de un triángulo es más chico que la suma de los otros dos lados.

En el $\triangle ABC$ (Figura 55) sea AC el lado más grande. Tras continuar el lado AB más allá de B marquemos el segmento $BD = BC$ y tracemos DC. Como el $\triangle BDC$ es isóceles, entonces $\angle D = \angle DCB$. Por lo tanto el ángulo D es más chico el ángulo DCA y, así, en el $\triangle ADC$ el lado AC es más chico que AD (Apartado 45), i.e., $AC < AB + BD$. Reemplazando BD con BC obtenemos

$$AC < AB + BC.$$

`Corolario.` De ambos lados de la desigualdad obtenida restemos AB o BC:

$$AC - AB < BC, \qquad AC - BC < AB.$$

Si leemos las desigualdades de derecha a izquierda, vemos que cada uno de los lados BC y AB es más grande que la diferencia de los otros dos lados. Obviamente lo mismo se puede decir del ángulo más grande AC y, por lo tanto,

en un triángulo cada lado es más grande que la diferencia de los otros dos lados.

`Nota.` (1) A la desiguladad descrita en el teorema anterior a menudo se dice que es la **desigualdad del triángulo**.

(2) Cuando el punto B está sobre el segmento AC, la desigualdad del triángulo se vuelve una igualdad $AC = AB + BC$. Aun más en general, si tres puntos están en la misma recta (y por consiguiente no forman un triángulo), entonces el más grande de los tres segmentos que conectan a estos puntos es la suma de los otros dos segmentos. Por lo tanto **para cualesquiera tres puntos** sigue siendo

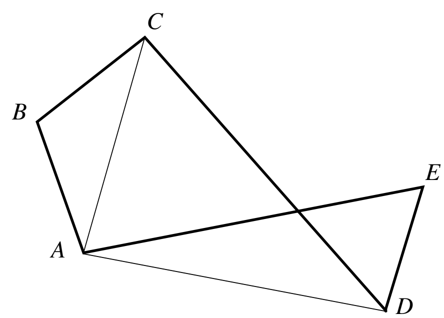

FIGURA 56

cierto que **el segmento que conecta a dos de ellos es más chico o es congruente con la suma de de los otros dos segmentos.**

49. Teorema.

El segmento de recta que conecta dos puntos es más chico que cualquier línea quebrada que conecta estos puntos.

Si la línea quebrada en cuestión consiste de sólo de dos lados, entonces el teorema ya se probó en el Apartado 48. Consideremos el caso en que la línea quebrada consta de más de dos lados. Sea AE (Figura 56) el segmento que conecta los puntos A y E y sea $ABCDE$ una línea quebrada que conecta los mismos puntos. Tenemos que probar que AE es más chico que la suma $AB+BC+CD+DE$.

Si conectamos a A con C y con D y usamos la desigualdad del triángulo, vemos que:

$$AE \leq AD+DE, \qquad AD \leq AC+CD, \qquad AC \leq AB+BC.$$

Además estas desigualdades no pueden ser igualdades todas al mismo tiempo. En efecto si esto pasa, si las tres desigualdades anteriores son igualdades, entonces (Figura 57) D estaría sobre el segmento AE, C sobre el segmento AD y B sobre el segmento AB, i.e., $ABCDE$ no sería una línea quebrada, sino el segmento de recta AE. Luego al sumar las desigualdades término a término y restar AD y AC de los dos lados obtenemos que

$$AE < AB+BC+CD+DE.$$

50. Teorema.

Si dos lados de un triángulo son congruentes, respectivamente, a dos lados de otro triángulo, entonces:

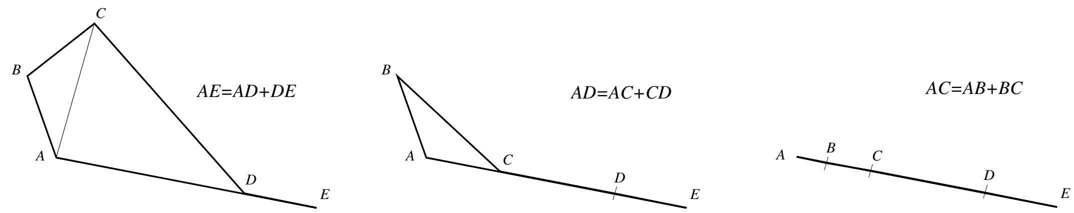

FIGURA 57

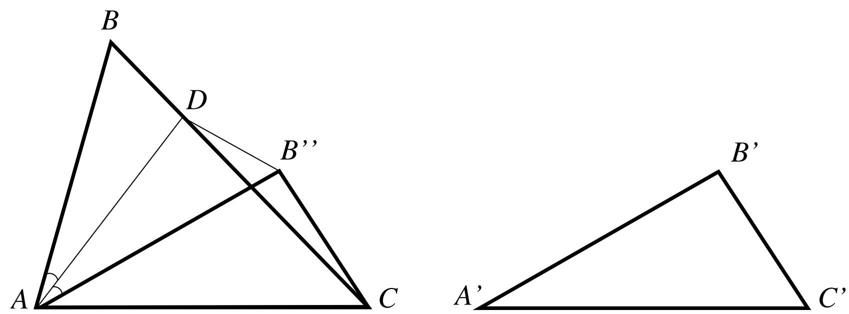

FIGURA 58

(1) el ángulo más grande contenido entre estos lados es opuesto al lado más grande;

(2) y viceversa, el más grande de los lados no congruentes es opuesto al ángulo más grande.

(1) En los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ nos dan

$$AB = A'B', \qquad AC = A'C', \qquad \angle A > \angle A'.$$

Se nos pide demostrar que $BC > B'C'$. Colocamos el $\triangle A'B'C'$ sobre el $\triangle ABC$ de tal manera (como se ve en la Figura 58) que el lado $A'C'$ coincide con AC. Como $\angle A > \angle A'$, entonces el lado $A'B'$ queda dentro del ángulo A. Supongamos que el $\triangle A'B'C'$ ocupa la posición $AB''C$ (el vértice B'' puede quedar fuera o dentro del $\triangle ABC$, o sobre el lado BC, pero el argumento que sigue se aplica a todos estos casos). Trazamos la bisectriz AD del ángulo BAB'' con D sobre el segmento BC; conectamos D con B''. Entonces obtenemos dos triángulos ABD y DAB'' que son congruentes porque tienen un lado común AD, $AB = AB''$ por hipótesis y $\angle BAD = \angle DAB''$ por construcción. La congruencia de los triángulos implica que $BD = DB''$. En el $\triangle DCB''$ derivamos $B''C < B''D + DC$ (por el Apartado 48). Reemplazamos $B''D$ con BD y obtenemos

$$B''C < BD + DC, \quad \text{y, así,} \quad B'C' < BC.$$

(2) Supongamos que en los mismos triángulos ABC y $A'B'C'$ nos dan $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ y $BC > B'C'$; demostremos que $\angle A > \angle A'$.

Supongamos lo contrario, i.e., que el $\angle A$ no es mayor que $\angle A'$. Entonces dos casos pueden ocurrir: o bien $\angle A = \angle A'$ o $\angle A < \angle A'$. En el primer caso los triángulos serían congruentes (por el criterio LAL) y por lo tanto el lado BC sería congruente con $B'C'$, lo que contradice la hipótesis. En el segundo caso, por la parte (1) del teorema, el lado BC sería menor que $B'C'$, lo que también contradice la hipótesis. Luego ambos casos quedan excluídos; el único caso que queda como posible es $\angle A > \angle A'$.

Ejercicios.

(1) ¿Puede un ángulo exterior de un triángulo isóceles ser más chico que el ángulo interior suplementario? Considera los casos en que el ángulo está (i) en la base y (ii) en el vértice.
(2) ¿Puede tener un triángulo sus lados: (a) de 1, 2 y 3 cm de longitud? ¿(b) de 2, 3 y 4 cm de longitud?
(3) ¿Puede un cuadrilátero tener lados de 2, 3, 4 y 10 cm de longitud?
`Demuestra los teoremas:`
(4) Un lado de un triángulo es más chico que su semiperímetro.
(5) Una mediana de un triángulo es más chica que su semiperímetro.
(6) Una mediana trazada a un lado de un triángulo es más chica que la semisuma de los otros dos lados.
Sugerencia: Duplica la mediana prolongándola después del punto medio del primer lado.
(7) La suma de las medianas de un triángulo es más chica que su perímetro pero más grande que su semiperímetro.
(8) La suma de las diagonales de un cuadrilátero es más chica que su perímetro, pero más grande que su semiperímetro.
(9) La suma de los segmentos que conectan un punto dentro de un triángulo con sus vértices es más chica que el semiperímetro del triángulo.
(10) Dados un ángulo agudo XOY y un punto A en la parte de adentro del ángulo. Encuentra un punto B sobre el lado OX y un punto C sobre el lado OY tales que el perímetro del triángulo ABC es mínimo.
Sugerencia: Introduce puntos simétricos de A con respecto a los lados del ángulo.